上的汉字能组成词语的结果有 4 种，∴ 两次抽取的卡片上的汉字能组成词语的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

9. (1)$\frac{1}{4}$ (2)方案 2 【解析】将电子元件 R_1 正常工作记为 M，不正常工作记为 M′，将电子元件 R_2 正常工作记为 N，不正常工作记为 N′.

(1)方案 1 中，从 A 到 B 的电路的情况列表如下：

R_1 \ R_2	N	N′
M	(M,N)	(M,N′)
M′	(M′,N)	(M′,N′)

共有 4 种等可能的结果，其中电路为通路状态的结果有(M，N)，共 1 种，

∴ 方案 1 中电路为通路状态的概率为$\frac{1}{4}$. 故答案为$\frac{1}{4}$.

(2)方案 2 中，从 A 到 B 的电路的情况列表如下：

R_1 \ R_2	N	N′
M	(M,N)	(M,N′)
M′	(M′,N)	(M′,N′)

共有 4 种等可能的结果，其中电路为通路状态的结果有(M，N)，(M，N′)，(M′，N)，共 3 种，

∴ 方案 2 中电路为通路状态的概率为$\frac{3}{4}$.

∵ $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$，∴ 两个方案中更稳定可靠的电路是方案 2. 故答案为方案 2.

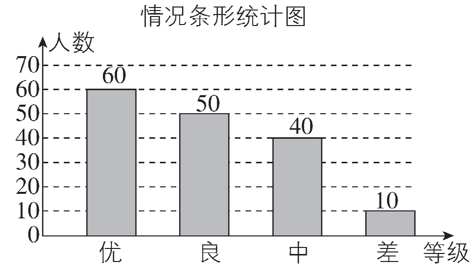
10. 【解】(1)接受测评的学生共有 $40\div25\%=160$(人).

扇形统计图中"优"部分所对应扇形的圆心角为 $360°\times\frac{60}{160}=135°$. 故答案为 160，135°.

等级为"良"的人数为 $160-(60+40+10)=50$(人).

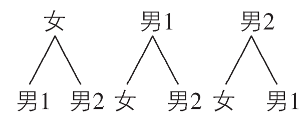
补全条形统计图如下：

学生消防安全知识掌握
情况条形统计图



(2)估计该校学生对消防安全知识的掌握情况达到"良"及"良"以上等级的人数为 $3\,200\times\frac{50+60}{160}=2\,200$(人).

(3)画树状图如下：



共有 6 种等可能的结果，其中抽到的恰好是 1 个男生与 1 个女生的结果有 4 种，

∴ 抽到的恰好是 1 个男生与 1 个女生的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

第二部分　题型突破

题型一　逻辑推理问题

刷题型

1. C 【解析】假设甲去，则乙也去，由"选出两个人参加"得出丙、丁不去，这与"如果丙不去，那么乙也不去"矛盾，所以甲不去. 假设丙不去，则乙也不去，只有丁去，这与"选出两个人参加"矛盾，所以丙去，则丁不去，乙去，故最后去参加活动的两个人是丙、乙. 故选 C.

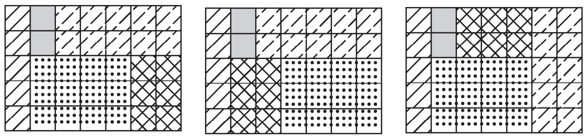
2. B 【解析】$125+126+135-(240-17)-57-73+31=386-223-130+31=33+31=64$(人)，则同时订阅 B，C 期刊的有 64 人. 故选 B.

3. 807 【解析】∵ 三个人说出的数中，3 和 4 都有重复，且位置相同，∴ 他们猜对的数字不可能是 3 和 4，可以排除这两个数字，∴ 小光猜对的数字是 8. ∵ 8 在百位上，∴ 小明猜对了个位上的 7，小亮猜对了十位上的 0，∴ 这个三位数密码是 807，故答案为 807.

4. 甲　12 【解析】假设甲正确，则小雅书包里书的数量为 12 本或小于 6 本，且书的数量大于 7，所以小雅书包里有 12 本书. 甲正确，乙、丙、丁错误，符合"只有一个人说得正确"的条件；假设乙正确，则甲错误，故书包里书的数量大于 12，与乙相矛盾，故排除；假设丙正确，则甲错误，故书包里书的数量大于 12，与丙相矛盾，故排除；假设丁正确，则甲、乙、丙均错误，与丁相矛盾，故排除. 综上，甲说得正确，小雅书包里有 12 本书. 故答案为甲，12.

5. 27 【解析】由题意得$\begin{cases}y+4=-2+x,\\y-3=4-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=11,\\y=5,\end{cases}$ ∴ $2x+y=22+5=27$. 故答案为 27.

6. (2)① (3)④ 【解析】根据题意，可有以下几种方案：



方案1(即题图(3))　　方案2　　方案3

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

(2)在各种方案中,有一个矩形的位置是固定的,这个矩形是①.

(3)有一个矩形在每种方案中的位置都不一样,这个矩形是④.

故答案为(2)①,(3)④.

题型二　新定义问题

刷题型

1. D 【解析】∵ $a=2x-3(x^2-2)=2x-3x^2+6$, $b=3x^2-2(x+1)=3x^2-2x-2$, ∴ $a+b=4$. ∵ 若 $a+b=m$,则称 a 与 b 是关于 m 的"平衡数",∴ a 与 b 是关于 4 的"平衡数",故选 D.

2. (1)−1　(2)$-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　【解析】(1)由运算"※"的定义知 $3※6=\dfrac{\sqrt{3+6}}{3-6}=-1$,故答案为−1.

(2)$(2-\sqrt{3})※(7※5)=(2-\sqrt{3})※\dfrac{\sqrt{7+5}}{7-5}=(2-\sqrt{3})※\dfrac{\sqrt{12}}{2}=(2-\sqrt{3})※\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times(2+2\sqrt{3})}{(2-2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4-12}=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{-8}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,故答案为$-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3. C 【解析】当 $3>x+2$,即 $x<1$ 时,∵ $3\oplus(x+2)>0$,∴ $3(x+2)+(x+2)>0$,∴ $3x+6+x+2>0$,∴ $x>-2$,∴ $-2<x<1$;
当 $3<x+2$,即 $x>1$ 时,∵ $3\oplus(x+2)>0$,∴ $3(x+2)-(x+2)>0$,∴ $2x+4>0$,∴ $x>-2$,∴ $x>1$. 综上所述,$-2<x<1$ 或 $x>1$. 故选 C.

4. B 【解析】由$\begin{cases}3x\otimes(-5)<m-7,\\x\otimes(2x-2)<2,\end{cases}$得$\begin{cases}3x-2\times(-5)<m-7,\\x-2\times(2x-2)<2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x<\dfrac{m-17}{3},\\x>\dfrac{2}{3}.\end{cases}$∵ 关于 x 的不等式组有且只有一个整数解,∴ $1<\dfrac{m-17}{3}\leqslant 2$,解得 $20<m\leqslant 23$,故选 B.

5. A 【解析】∵ $x★3=m$,∴ $x^2-3x=m$,即 $x^2-3x-m=0$. ∵ $x^2-3x-m=0$ 有两个实数根,∴ $\Delta=9+4m\geqslant 0$,解得 $m\geqslant-\dfrac{9}{4}$. 故选 A.

6. A 【解析】∵ $(a+2)x^2+(b-4)x+8=0$,∴ $(a+2)(x^2-2x+1)+2(a+2)x-(a+2)+(b-4)x+8=0$,即$(a+2)(x-1)^2+(2a+b)x+6-a=0$. ∵ $2(x-1)^2+1=0$ 与$(a+2)x^2+(b-4)x+8=0$ 是"同族二次方程",∴ $2(x-1)^2+1=0$ 与$(a+2)(x-1)^2+(2a+b)x+6-a=0$ 是"同族二次方程",∴ $2a+b=0$,$6-a=1$,解得 $a=5$,$b=-10$,则$-ax^2+bx+2\ 019=-5x^2-10x+2\ 019=-5(x^2+2x+1)+5+2\ 019=-5(x+1)^2+2\ 024\leqslant 2\ 024$,当 $x=-1$ 时,$-ax^2+bx+2\ 019$ 取得最大值 2 024,故选 A.

7. C 【解析】根据题意得,一次函数 $y=2x+4$ 的"相垂函数"是 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{2^2}=-\dfrac{1}{2}x-1$. 当 $x=0$ 时,$y=-\dfrac{1}{2}x-1=-1$,∴ 一次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ 的图象与 y 轴交于点$(0,-1)$;当 $y=0$ 时,$0=-\dfrac{1}{2}x-1$,解得 $x=-2$,∴ 一次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ 的图象与 x 轴交于点$(-2,0)$. 故选 C.

8. A 【解析】由题意得$\begin{cases}a+b=-3,\\a+1=b,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$ ∵ t 是关于 x 的方程 $x^2+bx+a-b=0$ 的根,∴ t 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根,∴ $t^2-t-1=0$,∴ $t^2=t+1$,∴ $t^3=t\cdot t^2=t(t+1)=t^2+t=t+1+t=2t+1$,∴ $t^3-2t^2-1=2t+1-2(t+1)-1=-2$. 故选 A.

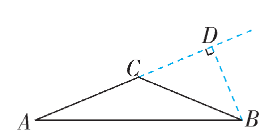
9. D 【解析】当 $3x-1\geqslant-x+5$,即 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时,$y=\max\{3x-1,-x+5\}=3x-1$,∵ $3>0$,∴ y 随 x 的增大而增大,∴ $x=\dfrac{3}{2}$ 时,y 有最小值,最小值为 $3\times\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{7}{2}$;当 $3x-1<-x+5$,即 $x<\dfrac{3}{2}$ 时,$y=\max\{3x-1,-x+5\}=-x+5$,∵ $-1<0$,∴ y 随 x 的增大而减小,∴ $x<\dfrac{3}{2}$ 时,$y>-\dfrac{3}{2}+5=\dfrac{7}{2}$. 综上所述,该函数的最小值为 $\dfrac{7}{2}$. 故选 D.

10. (1)【解】设 $x_1<x_2$,则 $y_1-y_2=(2x_1+4)-(2x_2+4)=2(x_1-x_2)$. 因为 $x_1<x_2$,所以 $x_1-x_2<0$,所以 $y_1-y_2=2(x_1-x_2)<0$,所以 $y_1<y_2$,因此该函数是"增函数". 故答案是增.

(2)【证明】设 $x_1<x_2<0$,则 $y_1-y_2=-5x_1^2-(-5x_2^2)=5(x_2^2-x_1^2)=5(x_2-x_1)(x_2+x_1)$. 因为 $x_1<x_2<0$,所以 $x_2-x_1>0$,$x_2+x_1<0$,所以 $y_1-y_2=5(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$,所以 $y_1<y_2$,因此该函数在自变量 $x<0$ 时是"增函数".

(3)【解】由题意可知,"增函数"的函数值随着自变量的增大而增大,"减函数"的函数值随着自变量的增大而减小. 当 $k=0$ 时,$y=kx^2-4x+5=-4x+5$,在自变量 $x>-1$ 时是"减函数",符合题意;当 $k\neq 0$ 时,∵ 函数 $y=kx^2-4x+5$ 在自变量 $x>-1$ 时是"减函数",∴ $k<0$ 且$-\dfrac{-4}{2k}=\dfrac{2}{k}\leqslant-1$,解得$-2\leqslant k<0$. 综上所述,常数 k 的取值范围是$-2\leqslant k\leqslant 0$. 故答案为$-2\leqslant k\leqslant 0$.

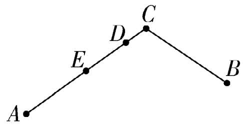
11. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　【解析】如图,过点 B 作 $BD\perp AC$,交 AC 的延长线于点 D.



∵ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,∴ 设 $BC=\sqrt{2}a$,$AC=$

$2a$. ∵ $\angle A$, $\angle ABC$ 互为半余角, ∴ $\angle DCB=\angle A+\angle ABC=45°$, ∴ 在 $Rt\triangle CDB$ 中, $BD=BC\cdot\sin 45°=\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a$, $CD=BC\cdot\cos 45°=\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a$. ∵ $AC=2a$, ∴ $AD=AC+CD=2a+a=3a$, ∴ $AB=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$. 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\cos A=\frac{AD}{AB}=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 故答案为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

12. 16 或 8 【解析】①如图(1), 当点 D 在线段 AC 上时, 易知 D 在 C, E 之间. ∵ 点 D 是折线 $A-C-B$ 的"折中点", ∴ $AD=DC+CB$. ∵ 点 E 为线段 AC 的中点,



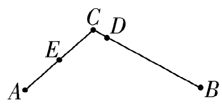
图(1)

∴ $AE=EC=\frac{1}{2}AC=6$, ∴ $AC=12$,

∴ $AD=AC-DC=10$, ∴ $DC+BC=10$,

∴ $BC=8$.

②如图(2), 当点 D 在线段 BC 上时,



图(2)

∵ 点 D 是折线 $A-C-B$ 的"折中点",

∴ $BD=DC+CA$. ∵ 点 E 为线段 AC 的中点,

∴ $AE=EC=\frac{1}{2}AC=6$, ∴ $AC=12$,

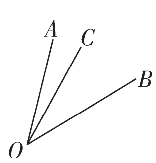
∴ $AC+DC=14$, ∴ $BD=14$,

∴ $BC=BD+DC=16$. 综上所述, BC 的长为 16 或 8.

故答案为 16 或 8.

13. (1) 15°或 75° (2) 30°或 150°

【解析】(1) 如图(1),

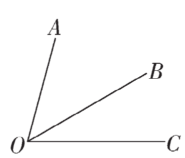


图(1)

$\angle AOB=45°$, $\angle BOC=30°$,

则 $\angle AOC=45°-30°=15°$;

如图(2),



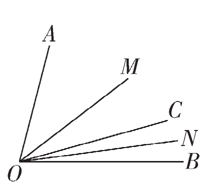
图(2)

$\angle AOB=45°$, $\angle BOC=30°$,

则 $\angle AOC=45°+30°=75°$. 故答案为 15°或 75°.

(2) 设 OM, ON 分别是 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 的平分线.

如图(3),



图(3)

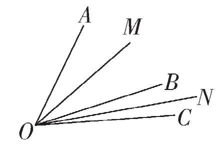
∵ OM, ON 分别是 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 的平分线,

∴ $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC$,

∴ $\angle MON=\angle BOM-\angle BON=\frac{1}{2}(\angle AOB-\angle BOC)=\frac{1}{2}\angle AOC$.

∵ $\angle AOC=60°$, ∴ $\angle MON=30°$.

如图(4),



图(4)

∵ OM, ON 分别是 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 的平分线,

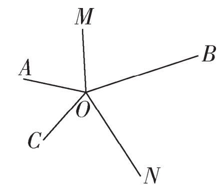
∴ $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB$,

$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC$,

∴ $\angle MON=\angle BOM+\angle BON=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}\angle AOC$.

∵ $\angle AOC=60°$, ∴ $\angle MON=30°$.

如图(5),



图(5)

∵ OM, ON 分别是 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 的平分线,

∴ $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB$,

$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC$,

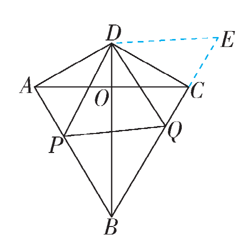
∴ $\angle MON=\angle BOM+\angle BON=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)$.

∵ $\angle AOB+\angle BOC=360°-\angle AOC=360°-60°=300°$,

∴ $\angle MON=\frac{1}{2}\times 300°=150°$.

故答案为 30°或 150°.

14. ①②④ 【解析】∵ $AB=BC$, $\angle ABC=60°$, ∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形, ∴ 结论①正确, $\angle BAC=\angle BCA=60°$. ∵ $AD=CD$, $\angle ADC=120°$, ∴ $\angle DAC=\angle DCA=30°$, ∴ $\angle DAB=30°+60°=90°=\angle DCB$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中, $\begin{cases}AD=CD,\\BD=BD,\\AB=CB,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABD\cong\triangle CBD(SSS)$, ∴ $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$, $\angle ADB=\angle CDB=\frac{1}{2}\angle ADC=\frac{1}{2}\times 120°=60°$, ∴ $AD=\frac{1}{2}BD$, ∴ 结论②正确. ∵ $\angle DOA=180°-\angle DAC-\angle ADB=180°-30°-60°=90°$, ∴ $BD\perp AC$.



∵ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AC\cdot OD+\frac{1}{2}AC\cdot OB=\frac{1}{2}AC\cdot BD$, ∴ 结论③错误. 如图所示, 延长 BC 到 E,

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

使 $CE=AP$，连接 DE. ∵ $\angle DAB=\angle DCB=90°$，∴ $\angle DAB=\angle DCE=90°$. 在 $\triangle DAP$ 和 $\triangle DCE$ 中，$\begin{cases}DA=DC,\\ \angle DAP=\angle DCE,\\ AP=CE,\end{cases}$

∴ $\triangle DAP\cong\triangle DCE(\mathrm{SAS})$，∴ $\angle ADP=\angle CDE$，$DP=DE$. ∵ $\angle ADC=120°$，$\angle PDQ=60°$，∴ $\angle ADP+\angle CDQ=\angle ADC-\angle PDQ=120°-60°=60°$，∴ $\angle EDQ=\angle CDE+\angle CDQ=\angle ADP+\angle CDQ=60°$，∴ $\angle PDQ=\angle EDQ$. 在 $\triangle PDQ$ 和 $\triangle EDQ$ 中，$\begin{cases}DP=DE,\\ \angle PDQ=\angle EDQ,\\ DQ=DQ,\end{cases}$ ∴ $\triangle PDQ\cong\triangle EDQ(\mathrm{SAS})$，

∴ $PQ=EQ=CE+CQ=AP+CQ$，∴ 结论④正确. 故答案为①②④.

15. (1)【解】①∵ 平行四边形、菱形的对角相等，但不一定互补，∴ 平行四边形、菱形不一定是“求同存异四边形”；∵ 矩形的邻边不一定相等，∴ 矩形不一定是“求同存异四边形”；∵ 正方形有一组邻边相等，并且对角互补，∴ 正方形一定是“求同存异四边形”. 故选 D.

②∵ 四边形 $ABCD$ 为“求同存异四边形”，∴ $\angle B+\angle D=180°$. ∵ $\angle B=50°$，∴ $\angle D=130°$. 故答案为 130°.

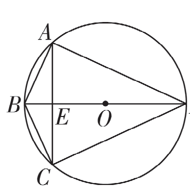
(2)【证明】∵ BD 垂直平分 AC，∴ $AB=CB$，$AD=CD$，$AE=CE$，$\angle BEA=\angle AED=90°$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ BD=BD,\\ DA=DC,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABD\cong\triangle CBD(\mathrm{SSS})$，∴ $\angle BAD=\angle BCD$.

∵ $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{BE}{CE}$，∴ $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{BE}{AE}$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DAE$，∴ $\angle BAE=\angle ADE$，∴ $\angle BAD=\angle BAE+\angle EAD=\angle ADE+\angle EAD=180°-\angle AED=90°$，∴ $\angle BAD=\angle BCD=90°$，∴ $\angle BAD+\angle BCD=180°$，∴ 四边形 $ABCD$ 是“求同存异四边形”.

(3)【解】∵ 圆内接四边形 $ABCD$ 是“求同存异四边形”，∴ 四边形 $ABCD$ 必有一组邻边相等. ①当 $BA=BC$ 时，结合圆的性质易知必有 $DA=DC$，同样地，当 $DA=DC$ 时，必有 $BA=BC$，如图(1)，∴ $AC\perp BD$.

∵ BD 为直径，∴ $AE=CE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}x$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，∴ $\dfrac{AC}{CE}=2$.

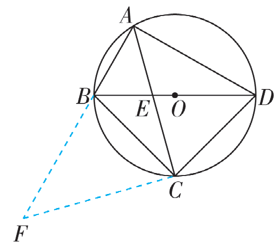
∵ $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD=\dfrac{1}{2}BD\cdot AE$，



图(1)

∴ $AB\cdot AD=BD\cdot AE=\dfrac{1}{2}x$. ∵ $AB+AD=\sqrt{(AB+AD)^2}=\sqrt{AB^2+2AB\cdot AD+AD^2}=\sqrt{BD^2+2BD\cdot AE}=\sqrt{1+x}$，∴ $y=\dfrac{AC}{CE}+AB+DA=\sqrt{x+1}+2(0<x\leqslant1)$.

②当 $BC=CD$ 时，延长 AB 至点 F，使得 $BF=AD$，如图(2)，则 $\angle BAC=\angle CAD=\angle BDC=\angle CBD$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，∴ 易得 $\angle CBF=\angle CDA$. 在 $\triangle CBF$ 和 $\triangle CDA$ 中，$\begin{cases}BC=CD,\\ \angle FBC=\angle ADC,\\ FB=AD,\end{cases}$ ∴ $\triangle CBF\cong$



图(2)

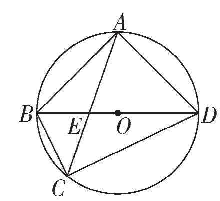
$\triangle CDA(\mathrm{SAS})$，∴ $\angle FCB=\angle ACD$，$FC=AC$. ∵ BD 为直径，∴ $\angle BAD=\angle BCD=90°$，∴ $\angle BAC=\angle CAD=\angle BDC=\angle CBD=45°$，$\angle FCA=\angle FCB+\angle BCA=\angle ACD+\angle BCA=\angle BCD=90°$，∴ $\triangle ACF$ 为等腰直角三角形，∴ $AF=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}x$，∴ $AB+AD=AB+BF=AF=\sqrt{2}x$. ∵ $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，∴ $BC=CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ∵ $\angle CAD=\angle CDE=45°$，$\angle DCE=\angle ACD$，∴ $\triangle CAD\backsim\triangle CDE$，∴ $\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CD}{CE}$，∴ $CE=\dfrac{CD^2}{CA}=\dfrac{1}{2x}$，∴ $\dfrac{AC}{CE}=2x^2$，∴ $y=\dfrac{AC}{CE}+AB+DA=2x^2+\sqrt{2}x\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1\right)$.

③当 $BA=AD$ 时，如图(3)，

∵ BD 为直径，∴ $\angle BAD=90°$，∴ $AB=AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $AB+AD=\sqrt{2}$.

∵ $BA=AD$，∴ $\angle ADB=\angle ACD$.

∵ $\angle DAE=\angle CAD$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACD$，



图(3)

∴ $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AD}{AC}$，∴ $AE=\dfrac{AD^2}{AC}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}=\dfrac{1}{2x}$，

∴ $CE=AC-AE=x-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x^2-1}{2x}$，∴ $\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{x}{\frac{2x^2-1}{2x}}=\dfrac{2x^2}{2x^2-1}$，∴ $y=\dfrac{AC}{CE}+AB+AD=\dfrac{2x^2}{2x^2-1}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1\right)$.

综上，$y=\sqrt{x+1}+2(0<x\leqslant1)$ 或 $y=2x^2+\sqrt{2}x\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1\right)$ 或 $y=\dfrac{2x^2}{2x^2-1}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1\right)$.

题型三　二次函数压轴题

刷题型

1.【解】(1)在 $y=-x-3$ 中，当 $x=0$ 时，$y=-3$，令 $y=0$，则 $x=-3$，∴ 点 A 的坐标为 $(-3,0)$，点 B 的坐标为 $(0,-3)$. 当 $x=1$ 时，$y=-4$，∴ 点 C 的坐标为 $(1,-4)$. 把 $(0,-3)$ 和 $(1,-4)$ 代入

$y=ax^2-2x+c$ 得 $\begin{cases}c=-3,\\a-2+c=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=-3,\end{cases}$ ∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) 在 $y=x^2-2x-3$ 中，令 $y=0$，则 $x^2-2x-3=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=3$，∴ 点 D 的坐标为 $(-1,0)$，点 E 的坐标为 $(3,0)$，

∴ $OA=OB=OE=3$，$AD=2$，

∴ $\angle BAE=\angle AEB=45°$，即 $\angle BAD=\angle OEF=45°$，∴ $AB=BE=\sqrt{2}OB=3\sqrt{2}$.

当 $\triangle EOF\backsim\triangle ABD$ 时，$\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{OE}{AB}$，即 $\dfrac{EF}{2}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}$，解得 $EF=\sqrt{2}$.

过点 F 作 $FG\perp x$ 轴于点 G，则 $EG=FG=1$，

∴ $OG=2$，∴ 点 F 的坐标为 $(2,-1)$.

当 $\triangle EOF\backsim\triangle ADB$ 时，$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{OE}{AD}$，即 $\dfrac{EF}{3\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$，

解得 $EF=\dfrac{9}{2}\sqrt{2}>3\sqrt{2}$，不符合题意，舍去.

综上，点 F 的坐标为 $(2,-1)$.

(3) 是定点. 点 M 的坐标为 $(1,-3)$.

∵ 点 C 的坐标为 $(1,-4)$，∴ 设直线 CP 的表达式为 $y=m(x-1)-4$. 联立 $\begin{cases}y=m(x-1)-4,\\y=x^2-2x-3,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x=1,\\y=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=m+1,\\y=m^2-4,\end{cases}$

∴ 点 P 的坐标为 $(m+1,m^2-4)$.

设直线 CQ 的表达式为 $y=n(x-1)-4$，

同理可得点 Q 的坐标为 $(n+1,n^2-4)$.

如图，分别过点 Q 作 $QH\perp x$ 轴，过点 P 作 $PN\perp x$ 轴交过点 C 且与 x 轴平行的直线于点 H，N，

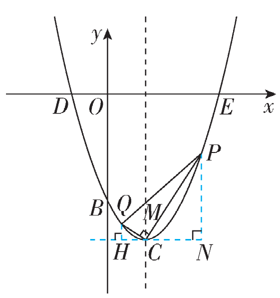
则 $\angle QHC=\angle N=\angle PCQ=90°$，

∴ $\angle HQC+\angle QCH=\angle PCN+\angle QCH=90°$，

∴ $\angle HQC=\angle PCN$，∴ $\triangle QHC\backsim\triangle CNP$，

∴ $\dfrac{QH}{CN}=\dfrac{HC}{PN}$，即 $\dfrac{n^2-4+4}{m+1-1}=\dfrac{1-n-1}{m^2-4+4}$，

解得 $mn=-1$ 或 $mn=0$（舍去）.



设直线 PQ 的表达式为 $y=kx+b$.

把点 P，Q 的坐标代入得

$\begin{cases}(m+1)k+b=m^2-4,\\(n+1)k+b=n^2-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=m+n,\\b=-m-n-3,\end{cases}$

∴ 直线 PQ 的表达式为 $y=(m+n)x-m-n-3$，当 $x=1$ 时，$y=-3$，

∴ PQ 与对称轴的交点 M 是定点，坐标为 $(1,-3)$.

2. (1)【解】将二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 化成顶点式为 $y=-(x-1)^2+c+1$，∴ 这个二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $P(1,c+1)$，∴ 由对称性可知，$x=-2$ 时的函数值与 $x=4$ 时的函数值相等，$x=0$ 时的函数值与 $x=2$ 时的函数值相等，∴ $t=-5$，$n=2$. 由题中表格可知，当 $x=1$ 时，$y=4$，

∴ $c+1=4$，∴ $c=3$. 故答案为 $-5,2,3$.

(2)【证明】由(1)和题意可知，$y=-(x-1)^2+4$，$P(1,4)$，当 $y=0$ 时，$x=-1$ 或 $x=3$，∴ $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

∴ $PA=\sqrt{(1+1)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，$PB=\sqrt{(1-3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

连接 PC. ∵ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}$，∴ $\dfrac{1}{2}AB\cdot y_P=\dfrac{1}{2}PA\cdot d_1+\dfrac{1}{2}PB\cdot d_2$，∴ $\dfrac{1}{2}\times[3-(-1)]\times4=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times(d_1+d_2)$，∴ $d=d_1+d_2=\dfrac{16}{2\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，

∴ d 为定值.

(3)【解】由(2)得 $PA=PB=2\sqrt{5}$，$AC=m+1$，

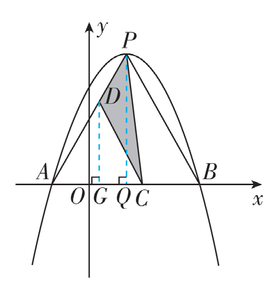
∴ $\angle PAB=\angle PBA$.

∵ $CD/\!/PB$，∴ $\angle DCA=\angle PBA$，

∴ $\angle DCA=\angle PAB$，∴ $AD=CD$.

如图，过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，过点 D 作 $DG\perp x$ 轴于点 G，

∴ $AG=CG=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{m+1}{2}$，$AQ=\dfrac{1}{2}AB=2$，$PQ=4$，$DG/\!/PQ$，



∴ $\triangle ADG\backsim\triangle APQ$，

∴ $\dfrac{DG}{PQ}=\dfrac{AG}{AQ}$，即 $\dfrac{DG}{4}=\dfrac{\frac{m+1}{2}}{2}$，

∴ $DG=m+1$，

∴ $S_{\triangle PCD}=S_{\triangle APC}-S_{\triangle ADC}$

$=\dfrac{1}{2}AC\cdot PQ-\dfrac{1}{2}AC\cdot DG$

$=\dfrac{1}{2}\times4(m+1)-\dfrac{1}{2}(m+1)(m+1)$

$=-\dfrac{1}{2}(m-1)^2+2$.

由二次函数的性质可知，在 $-1<m<3$ 范围内，当 $m=1$ 时，$\triangle PCD$ 的面积最大，最大值为 2，

∴ 此时 $AG=\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$，$DG=m+1=1+1=2$.

又∵ $A(-1,0)$，∴ $OA=1$，

∴ $OA=AG$，即点 G 与点 O 重合，

∴ 此时点 D 的坐标为 $(0,2)$. 综上，$\triangle PCD$ 面积的最大值为

2，此时点 D 的坐标为 $(0,2)$.

3.【解】(1) 由题意得 $\begin{cases}1-b+c=0,\\9+3b+c=0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}b=-2,\\c=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$.

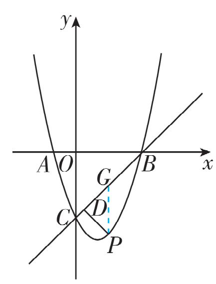
(2) $\because y=x^2-2x-3$ 中，$x=0$ 时，$y=-3$，$\therefore C(0,-3)$.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b'$，

$\therefore \begin{cases}3k+b'=0,\\b'=-3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}k=1,\\b'=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=x-3$.

设 $P(a,a^2-2a-3)(0<a<3)$. 如图，过 P 作 $PG/\!/OC$ 交 BC 于 G，$\therefore G(a,a-3)$.



$\because OB=OC=3$，

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=45°$，

$\therefore \angle PGD=\angle OCB=45°$.

$\because GP=(a-3)-(a^2-2a-3)=-a^2+3a$，

$\therefore PD=\frac{\sqrt{2}}{2}GP=\frac{\sqrt{2}}{2}(-a^2+3a)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9\sqrt{2}}{8}$，

$\therefore$ 当 $a=\frac{3}{2}$ 时，PD 取得最大值，为 $\frac{9\sqrt{2}}{8}$，此时 $P\left(\frac{3}{2},-\frac{15}{4}\right)$.

(3) 是定值. 设直线 KQ 的表达式为 $y=k_1x+b_1$，$K(m,m^2-2m-3)$，$Q(n,n^2-2n-3)(m,n\neq-1)$. $\because$ 直线 KQ 经过点 $T(3,2)$，

$\therefore 2=3k_1+b_1$，$\therefore b_1=2-3k_1$，

$\therefore$ 直线 KQ 的表达式为 $y=k_1x+2-3k_1$.

联立 $\begin{cases}y=k_1x+2-3k_1,\\y=x^2-2x-3,\end{cases}$

得 $x^2-(2+k_1)x+3k_1-5=0$，

$\therefore m+n=2+k_1$，$mn=3k_1-5$.

设直线 AK 的表达式为 $y=k_2x+b_2$，

$\therefore \begin{cases}-k_2+b_2=0,\\mk_2+b_2=m^2-2m-3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_2=m-3,\\b_2=m-3,\end{cases}$

$\therefore y=(m-3)x+(m-3)$，

$\therefore M(0,m-3)$，$\therefore OM=|m-3|$.

同理可得 $ON=|3-n|$，

$\therefore OM\cdot ON=|m-3||3-n|=|3(m+n)-mn-9|=|3(2+k_1)-(3k_1-5)-9|=2$，

$\therefore OM$ 与 ON 的积为定值，定值为 2.

4.【解】(1) $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx-\frac{7}{2}(a>0)$ 的图象 L 过点 $A\left(2,-\frac{7}{2}\right)$，$L$ 的对称轴为直线 $x=c$，$\therefore \begin{cases}4a+2b-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2},\\-\frac{b}{2a}=c,\end{cases}$

$\therefore b=-2a$，$\therefore c=1$.

(2) $\because L$ 与 x 轴的交点为 $B(x_1,0)$，$C(x_2,0)(x_1<x_2)$，抛物线 L：$y=ax^2+bx-\frac{7}{2}(a>0)$ 的对称轴为直线 $x=1$，$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=1$.

又 $\because x_2-x_1=4\sqrt{2}$，

$\therefore x_1=1-2\sqrt{2}$，$x_2=1+2\sqrt{2}$，

$\therefore B(1-2\sqrt{2},0)$，$C(1+2\sqrt{2},0)$，

$\therefore a\cdot(1-2\sqrt{2})^2+b\cdot(1-2\sqrt{2})-\frac{7}{2}=0$，且 $b=-2a$，

$\therefore (1-2\sqrt{2})^2a-2(1-2\sqrt{2})a-\frac{7}{2}=0$，

整理得，$7a=\frac{7}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

$\therefore b=-2a=-2\times\frac{1}{2}=-1$，

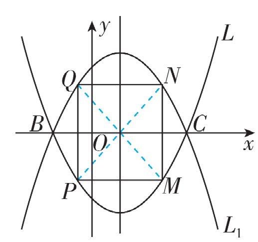
$\therefore$ 抛物线 L 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{7}{2}$.

$\because y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-4$，$\therefore$ 抛物线 L 的顶点坐标为 $(1,-4)$.

$\because$ 曲线 L_1 是与 L 关于 x 轴对称的抛物线，则曲线 L_1 开口向下，顶点坐标为 $(1,4)$，

$\therefore$ 曲线 L_1 的表达式为 $y_1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+4$.

(3) 如图所示，连接 PN，MQ.



$\because$ 四边形 $PQNM$ 是正方形，

$\therefore PQ=QN=NM=MP$.

$\because$ 点 P，M 在抛物线 L：$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{7}{2}$ 的图象上，点 Q，N 在抛物线 L_1：$y_1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+4=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$ 的图象上，

$\therefore$ 设 $P\left(p,\frac{1}{2}p^2-p-\frac{7}{2}\right)(p<1)$，$N\left(n,-\frac{1}{2}n^2+n+\frac{7}{2}\right)$，

$\therefore Q\left(p,-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{7}{2}\right)$，$M\left(n,\frac{1}{2}n^2-n-\frac{7}{2}\right)$，

$\therefore PQ=-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}p^2-p-\frac{7}{2}\right)=-p^2+2p+7$，$QN=n-p$.

由题意知点 Q，N 关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore \frac{n+p}{2}=1$，则 $n=2-p$，$\therefore QN=2-2p$，

$\therefore -p^2+2p+7=2-2p$，整理得，$p^2-4p-5=0$，

解得 $p_1=5$（不符合题意，舍去），$p_2=-1$，$\therefore \frac{1}{2}p^2-p-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\times(-1)^2-(-1)-\frac{7}{2}=-2$，$QN=2-2p=2-2\times(-1)=4$，

$\therefore P(-1,-2)$，正方形 $PQNM$ 的边长为 4.

题型四　圆的综合题

刷题型

1.【证明】(1) 连接 OC，如图(1).

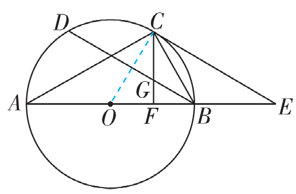
$\because \angle A=\angle CBD$，

$\therefore \overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}$，$\therefore OC\perp DB$.

$\because DB/\!/CE$，$\therefore OC\perp CE$.

$\because OC$ 是⊙O 的半径，

$\therefore CE$ 是⊙O 的切线.



图(1)

(2) $\because AB$ 为直径，

$\therefore \angle ACB=90°$. $\because CF\perp AB$，

$\therefore \angle ACB=\angle CFB=90°$，

$\therefore \angle ABC+\angle BCF=90°=\angle ABC+\angle CAB$，

$\therefore \angle CAB=\angle BCF$. $\because \angle CAB=\angle CBD$，

$\therefore \angle BCF=\angle CBD$，$\therefore CG=BG$.

(3) 连接 AD，如图(2).

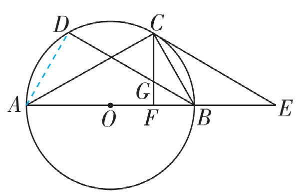
$\because AB$ 为直径，$\therefore \angle ADB=90°$.

$\because \overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{DC}$，$\therefore \angle DAC=\angle CBD$.

$\because \angle CAB=\angle CBD$，

$\therefore \angle DAC=\angle CAB$.

$\because \angle DBA=30°$，$\therefore \angle DAB=90°-30°=60°$，



图(2)

$\therefore \angle DAC=\angle BAC=30°$，

$\therefore \angle DBC=30°$，$\therefore \angle ABC=60°$，$\therefore \angle BCG=30°$，

$\therefore \angle CGB=120°=\angle CBE$.

$\because CE/\!/BD$，$\therefore \angle BCE=\angle CBG$，

$\therefore \triangle CGB\backsim\triangle EBC$，

$\therefore \frac{BC}{CE}=\frac{BG}{BC}$，即 $BC^2=BG\cdot CE$.

2.【解】(1) 由阿基米德折弦定理可知，$CD=DB+BA$. $\because AB=10$，$BC=16$，

$\therefore AB+BC=26$，$\therefore DB+BA=\frac{1}{2}(AB+BC)=13$，

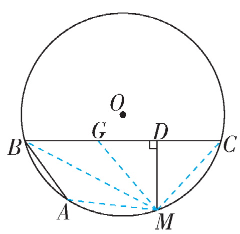
$\therefore BD=3$.

(2) $AB+CD=BD$. 证明如下：

如图(1)，在 BC 上取 $BG=BA$，连接 MA，MB，MC，MG.

$\because$ 点 M 是 $\overset{\frown}{AC}$ 中点，

$\therefore AM=CM$，$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MC}$，



图(1)

$\therefore \angle ABM=\angle CBM$.

在△ABM 和△GBM 中，$\begin{cases}BA=BG,\\ \angle ABM=\angle GBM,\\ BM=BM,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle GBM(\text{SAS})$，

$\therefore AM=GM$，$\therefore GM=CM$.

$\because DM\perp BC$，$\therefore CD=DG$，

$\therefore CD=BD-BG=BD-AB$，即 $AB+CD=BD$.

(3) $\because BC$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle BAC=90°$. $\because$ ⊙O 的半径为 10，

$\therefore BC=20$. $\because AB=12$，$\therefore$ 由勾股定理得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=16$，

$\therefore AC+AB=16+12=28$.

①当点 D 在 AC 上方时，如图(2)，过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M，连接 OD，CD.

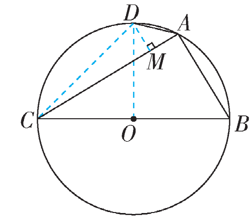
$\because \angle DAC=45°$，

$\therefore \angle BAD=135°$，$\therefore \angle BCD=45°$，

$\therefore \angle BOD=90°$，$\therefore \angle COD=90°$，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，即点 D 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，

$\therefore CM=AM+AB$，$\therefore CM=\frac{1}{2}(AC+AB)=14$，



图(2)

$\therefore AM=2$，$\therefore AD=\sqrt{2}AM=2\sqrt{2}$.

②当点 D 在 AC 下方时，如图(3)，过点 D 作 $DN\perp AC$ 于点 N.

$\because \angle DAC=45°$，$\angle BAC=90°$，

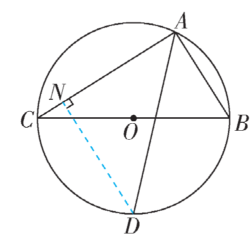
$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，即点 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.

同(2)可得，$AN=CN+AB$，

$\therefore AN=\frac{1}{2}(AC+AB)=14$，

$\therefore AD=\sqrt{2}AN=14\sqrt{2}$.



图(3)

综上可知，AD 的长为 $2\sqrt{2}$ 或 $14\sqrt{2}$.

3. (1)**【证明】**$\because \triangle ABC$ 内接于⊙O，AB 为⊙O 的直径，$\therefore OA=OC$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CAD=\angle ACO$，$\angle ACO+\angle OCB=90°$.

$\because CD$ 是⊙O 的切线，OC 为⊙O 的半径，

$\therefore \angle OCD=90°$，$\therefore \angle OCB+\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle ACO=\angle BCD$，$\therefore \angle BCD=\angle CAD$.

【解】(2) $\because \angle D=\angle D$，由(1)得 $\angle BCD=\angle CAD$，$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle CAD$，$\therefore \frac{BC}{CA}=\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$.

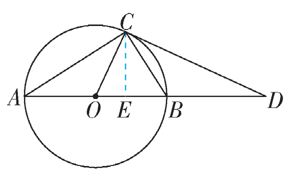
$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\cos\angle ABC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore$ 设 $BC=\sqrt{5}k$, 则 $AB=5k$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(5k)^2-(\sqrt{5}k)^2}=2\sqrt{5}k$.

$\because CD=10$, $\therefore AD=\dfrac{CD\cdot CA}{BC}=\dfrac{10\cdot 2\sqrt{5}k}{\sqrt{5}k}=20$, $BD=\dfrac{BC\cdot CD}{CA}=\dfrac{\sqrt{5}k\cdot 10}{2\sqrt{5}k}=5$,

$\therefore AB=AD-BD=15$, $\therefore OA=OB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{15}{2}$, $\therefore$ $\odot O$ 的半径为 $\dfrac{15}{2}$.

(3)①如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E.



由图可知, $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$,

即 $S=S_1+S_2$.

设 $\dfrac{S_1}{S_2}=a$. 由 $\sqrt{S_1}=\sqrt{S}-3\sqrt{S_2}$ 得 $\sqrt{S_1}=\sqrt{S_1+S_2}-3\sqrt{S_2}$,

$\therefore \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}}=\sqrt{\dfrac{S_1+S_2}{S_2}}-3$,

$\therefore \sqrt{a}=\sqrt{a+1}-3$. $\because \dfrac{S_1}{S_2}=a>0$,

$\therefore$ 两边平方,整理得 $\sqrt{a+1}=\dfrac{5}{3}$,

$\therefore a+1=\dfrac{25}{9}$, 解得 $a=\dfrac{16}{9}$.

$\because S_1=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE$, $S_2=\dfrac{1}{2}BD\cdot CE$,

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{16}{9}$,

$\therefore$ 设 $AB=16x$, $BD=9x$, 则 $OB=OC=\dfrac{1}{2}AB=8x$.

$\because \angle OCD=90^\circ$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OCD$ 中, $\sin D=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{OC}{OB+BD}=\dfrac{8x}{8x+9x}=\dfrac{8}{17}$.

②$\because CE\perp AB$, $FG\perp CD$,

$\therefore \angle CED=\angle CEO=90^\circ$, $\angle FGD=\angle CGH=90^\circ$.

$\because \angle OCD=90^\circ$,

$\therefore OC/\!/FG$, $\therefore \angle COE=\angle GFD$.

$\because \angle D=90^\circ-\angle GFD$, $\angle OCE=90^\circ-\angle COE$,

$\therefore \angle D=\angle OCE$, $\therefore \tan D=\tan\angle OCE$.

$\because$ 在 Rt$\triangle CED$ 中, $\tan D=\dfrac{CE}{ED}$,

在 Rt$\triangle OCE$ 中, $\tan\angle OCE=\dfrac{OE}{EC}$,

$\therefore \dfrac{CE}{ED}=\dfrac{OE}{EC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

设 $EC=a$, 则 $OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $ED=\sqrt{2}a$.

$\because \dfrac{EF}{EO}=x(x>0)$, $\therefore EF=xEO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax$.

$\because \angle CGH=\angle CED=90^\circ$, $\angle GCH=\angle ECD$,

$\therefore \triangle CGH\backsim\triangle CED$, $\therefore \dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CG}{CE}$,

$\therefore CH\cdot CE=CD\cdot CG$.

$\because \angle DEC=\angle DGF$, $\angle D=\angle D$,

$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle DGF$, $\therefore \dfrac{DE}{DG}=\dfrac{DC}{DF}$,

$\therefore DE\cdot DF=DG\cdot DC$.

$\because y=DG\cdot\sqrt{\dfrac{1}{DE\cdot DF}+\dfrac{1}{CH\cdot CE}}$

$=DG\cdot\sqrt{\dfrac{1}{DG\cdot DC}+\dfrac{1}{CD\cdot CG}}=DG\cdot\sqrt{\dfrac{CG+DG}{DG\cdot DC\cdot CG}}$

$=DG\cdot\sqrt{\dfrac{CD}{DG\cdot DC\cdot CG}}$

$=DG\cdot\sqrt{\dfrac{1}{DG\cdot CG}}=\sqrt{DG^2\cdot\dfrac{1}{DG\cdot CG}}$

$=\sqrt{\dfrac{DG}{CG}}$.

$\because OC/\!/FG$, $\therefore \dfrac{DG}{CG}=\dfrac{DF}{OF}$.

$\because \dfrac{DF}{OF}=\dfrac{DE+EF}{OE-EF}=\dfrac{\sqrt{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x}=\dfrac{2+x}{1-x}$, $\therefore y=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$.

$\because x>0$, $\therefore 2+x>0$, $\therefore 1-x>0$,

解得 $x<1$, $\therefore 0<x<1$. 综上所述, $y=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}(0<x<1)$.

4. (1)**【解】**①任何一个三角形都有三个“边切圆”,“边心”分别是三角形三个内角的平分线与对边的交点,故此说法正确;

②“边心”一定在三角形内角的平分线上,故原说法错误;

③三角形的一个“边切圆”的圆心在内角的平分线上,三角形外接圆圆心在边上的只有直角三角形,且外接圆圆心为斜边中点,∴ 当三角形的一个“边切圆”的圆心与外接圆圆心重合时,该三角形是等腰直角三角形,故此说法正确. 故答案为√,×,√.

(2)**【证明】**如图(1),过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D.

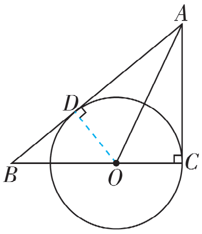
$\because \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore OC\perp AC$. $\because OC$ 为半径,

$\therefore AC$ 与 $\odot O$ 相切.

$\because OD\perp AB, OC\perp AC$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot OD}{\frac{1}{2}AC\cdot OC}=\dfrac{\frac{1}{2}OB\cdot AC}{\frac{1}{2}OC\cdot AC}$,



图(1)

$\therefore \dfrac{AB\cdot OD}{AC\cdot OC}=\dfrac{OB}{OC}$. 又$\because \dfrac{OB}{OC}=\dfrac{AB}{AC}$,

$\therefore \dfrac{OD}{OC}=1$,即 $OC=OD$,

$\therefore OD$ 为⊙O 半径.

又$\because OD\perp AB$,

$\therefore AB$ 与⊙O 相切,

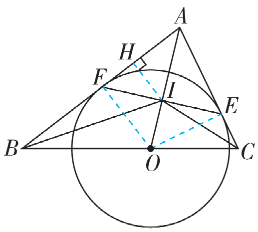
$\therefore$ ⊙O 是 Rt$\triangle ABC$ 的"边切圆".

(3)①**【证明】**$\because AB,AC$ 分别与⊙O 相切于点 F,E, $\therefore AF=AE$.

连接 OE,OF,如图(2).

则 $OF\perp AB, OE\perp AC$,且 $OE=OF$,

$\therefore \angle BFO=\angle AFO=90^\circ$, OA 垂直平分 EF,



图(2)

$\therefore \angle FAI+\angle AOF=\angle IFO+\angle IOF=90^\circ$,

$\therefore \angle FAI=\angle IFO$.

又$\because$ 点 I 是$\triangle ABC$ 的内切圆圆心,

$\therefore AI$ 平分$\angle BAC$, BI 平分$\angle ABC$, CI 平分$\angle BCA$,

$\therefore \angle BIC=180^\circ-(\angle IBC+\angle ICB)$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)$

$=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle BAC$.

又$\because \angle BFI=\angle BFO+\angle IFO=90^\circ+\angle IFO=90^\circ+\angle FAI=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle BAC$, $\therefore \angle BIC=\angle BFI$.

②**【解】**如图(2),由①得 BI 平分$\angle ABC$, $\therefore \angle FBI=\angle IBO$. 又$\because \angle BIC=\angle BFI$, $\therefore \triangle BIC\backsim\triangle BFI$,

同理可证$\triangle BIC\backsim\triangle IEC$,

$\therefore \triangle BFI\backsim\triangle IEC$, $\therefore \dfrac{BF}{IE}=\dfrac{FI}{EC}$,

$\therefore BF\cdot EC=IE\cdot FI$.

由①可知 $FI=EI$,

$\therefore BF\cdot EC=IE\cdot FI=FI^2=FO^2-OI^2=R^2-OI^2$.

过点 I 作 $IH\perp AF$ 于点 H,则 $IH/\!/OF$,

$\therefore \triangle AIH\backsim\triangle AOF$, $\therefore \dfrac{HI}{OF}=\dfrac{AI}{AO}$,

$\therefore \dfrac{r}{R}=\dfrac{AI}{AI+IO}$, $\therefore \dfrac{R}{r}=\dfrac{AI+IO}{AI}=1+\dfrac{IO}{AI}$,

解得 $AI=\dfrac{r\cdot IO}{R-r}$.

由①知$\angle FAI=\angle IFO$, $\angle AIF=\angle OIF=90^\circ$, $\therefore \triangle FOI\backsim\triangle AFI$,

$\therefore \dfrac{FI}{AI}=\dfrac{OI}{FI}$,

$\therefore FI^2=IO\cdot IA=IO\cdot\dfrac{r\cdot IO}{R-r}=\dfrac{r\cdot IO^2}{R-r}=R^2-OI^2$, $\therefore OI^2=R^2-Rr$,

$\therefore BF\cdot EC=R^2-OI^2=Rr$.

题型五　三角形与四边形综合题

刷题型

1.【解】(1)①$PM=CM$.

理由:由折叠的性质得 $AD=DP$, $\angle DAB=\angle DPB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC$, $\angle DAB=\angle BCD$,

$\therefore DP=BC$, $\angle DPB=\angle BCD$.

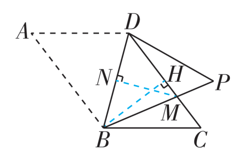
又$\because \angle DMP=\angle BMC$,

$\therefore \triangle DPM\cong\triangle BCM$,

$\therefore PM=CM$.

②由(1)得$\triangle DPM\cong\triangle BCM$, $\therefore DM=BM$.

如图(1),过点 M 作 $MN\perp BD$ 于点 N,过点 B 作 $BH\perp CD$ 于点 H,



图(1)

$\therefore DN=BN=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{5}{2}$.

$\because BD=BC=5$, $CD=6$, $\therefore DH=CH=\dfrac{1}{2}CD=3$,

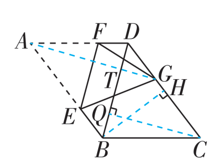
$\therefore \cos\angle CDB=\dfrac{DH}{BD}=\dfrac{DN}{DM}=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore DM=\dfrac{25}{6}$,

$\therefore MN=\sqrt{DM^2-DN^2}=\dfrac{10}{3}$,

$\therefore S_{\triangle BDM}=\dfrac{1}{2}BD\cdot MN=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{25}{3}$.

(2)如图(2),过点 C 作 $CQ\perp BD$ 于点 Q,连接 AG 交 BD 于点 T,过点 B 作 $BH\perp CD$ 于点 H.



图(2)

由折叠的性质得 $AG\perp EF$.

$\because EF/\!/BD$, $\therefore AG\perp BD$,

$\therefore \angle ATD=90^\circ$.

同②可得 $DH=CH=\dfrac{1}{2}CD=3$,

$\therefore BH=\sqrt{BD^2-DH^2}=4$,

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot BH=\dfrac{1}{2}BD\cdot CQ$,

$\therefore CQ=\frac{24}{5}$,

$\therefore BQ=\sqrt{BC^2-CQ^2}=\frac{7}{5}$, $\therefore DQ=BD-BQ=5-\frac{7}{5}=\frac{18}{5}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD=BC, AD//CB$,

$\therefore \angle ADT=\angle CBQ$.

又 $\because \angle ATD=\angle CQB=90°$, $\therefore \triangle ADT\cong\triangle CBQ$,

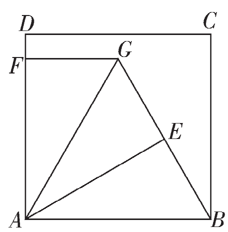
$\therefore DT=BQ=\frac{7}{5}$.

$\because AG\perp BD, CQ\perp BD$, $\therefore GT//CQ$,

$\therefore \triangle DGT\backsim\triangle DCQ$,

$\therefore \frac{DG}{DC}=\frac{DT}{DQ}$, 即 $\frac{DG}{6}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{18}{5}}$, 解得 $DG=\frac{7}{3}$.

2. (1)【解】如图, B,E,G 三点在同一条直线上. 由旋转的性质可得 $AB=AG$, $\angle AFG=\angle AEB=90°$, $\angle BAE=\angle FAG$,



$\therefore$ 易得 AE 是 $\angle GAB$ 的平分线,

$\therefore \angle GAE=\angle BAE=\angle FAG$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle FAB=90°$,

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{3}\angle FAB=30°$.

(2)【解】由题意可得 $AE+EG\geqslant AG$, $\therefore$ 当 A,E,G 三点共线时, $AE+EG$ 的值最小, 最小值为 $AG=AB=4$,

$\therefore AE+EG$ 的最小值为 4.

(3)【证明】设正方形 $ABCD$ 的边长为 a, $BE=x$.

$\because GH\perp AB$,

$\therefore \angle AHG=\angle FAB=\angle AEB=\angle AFG=90°$,

$\therefore$ 四边形 $FAHG$ 为矩形,

$\therefore GH=AF=AE, FG=AH=EB=x$,

$\therefore BH=a-x$.

$\because \angle EBH=\angle EBA, \angle EHB=\angle AEB=90°$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle EBH$,

$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{BH}{BE}$, 即 $BE^2=AB\cdot BH$,

$\therefore x^2=a(a-x)$,

解得 $x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}a$.

$\because a>0, x>0$, $\therefore x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$,

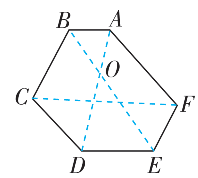
$\therefore \frac{EH}{GH}=\frac{EH}{AF}=\frac{EH}{AE}=\sin\angle EAH=\frac{BE}{AB}=\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\therefore \frac{GE}{EH}=\frac{GH-EH}{EH}=\frac{\frac{EH}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-EH}{EH}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\therefore \frac{EH}{GH}=\frac{GE}{EH}$,

$\therefore E$ 是线段 GH 的黄金分割点.

3. (1)【解】如图(1), 连接 BE, CF, AD, BE 与 AD 交于点 O.



图(1)

①由 $AB//DE$, 只能知道 $\triangle AOB\backsim\triangle DOE$, 不能判断出 $AB=DE$, 同理不能判断出 $BC=EF$, $AF=CD$, 故平行六边形的三组主对边分别相等是错误的;

②$\because AB//DE$, $\therefore \angle ABE=\angle BED$, 同理可得 $\angle CBE=\angle BEF$, $\therefore \angle ABC=\angle DEF$, 同理可得 $\angle BAF=\angle CDE$, $\angle BCD=\angle AFE$, 故平行六边形的三组主对角分别相等是正确的;

③由图(1)可知, 平行六边形的三条主对角线互相平分是错误的. 故答案为错误, 正确, 错误.

(2)【证明】如图(2), 过点 Q 作 $QH//PO$, 且 $QH=PO$, 连接 OH, HS,

则四边形 $PQHO$ 是平行四边形,

$\therefore PQ//OH, PQ=OH$.

在平行六边形 $OPQRST$ 中, $PO//RS, PO=RS$,

$\therefore QH//RS, QH=RS$,

$\therefore$ 四边形 $QRSH$ 为平行四边形,

$\therefore QR//HS, QR=HS$.

在平行六边形 $OPQRST$ 中, $PQ//ST, QR//OT$,

$\therefore OH//ST, HS//OT$,

$\therefore$ 四边形 $HSTO$ 为平行四边形,

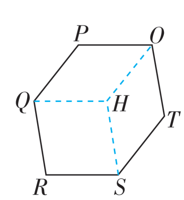
$\therefore HS=OT, OH=ST$,

$\therefore QR=OT, PQ=ST$.

$\because OP=PQ=QR=RS$,

$\therefore PQ=QR=RS=ST=OT=PO$,

$\therefore$ 平行六边形 $OPQRST$ 是菱六边形.



图(2)

(3)【解】设三角形纸片为 $\triangle ABC$, 剪裁后的纸片为菱六边形

$DEFGHK$，如图(3)，

$\therefore DE/\!/HG, HK/\!/EF, DE=EF=FG=HG=KH=DK$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC, \triangle BKH\backsim\triangle BAC$，

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}, \dfrac{KH}{AC}=\dfrac{BK}{AB}$.

设 $DE=EF=FG=HG=KH=DK=x$，

则 $\dfrac{x}{6}=\dfrac{AD}{3}=\dfrac{AE}{4}, \dfrac{x}{4}=\dfrac{BK}{3}$，

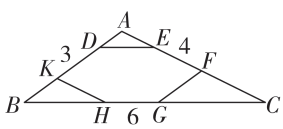
$\therefore AD=\dfrac{1}{2}x, AE=\dfrac{2}{3}x, BK=\dfrac{3}{4}x$.

$\because AB=AD+DK+BK=3$，

$\therefore \dfrac{1}{2}x+x+\dfrac{3}{4}x=3$，

解得 $x=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore \triangle ADE$ 的各边长为 $AD=\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2}{3}, AE=\dfrac{2}{3}x=\dfrac{8}{9}, DE=x=\dfrac{4}{3}$.（答案不唯一）



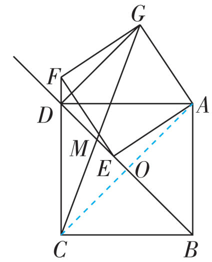
图(3)

4.【解】(1) $BD\perp DG$. 理由如下：在正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 中，$AB=AD, AE=AG, \angle BAD=\angle EAG=90°$，$\therefore \angle BAE=\angle DAG=90°-\angle DAE$，$\therefore \triangle BAE\cong\triangle DAG$(SAS)，$\therefore \angle ABE=\angle ADG$. $\because \angle ABD+\angle ADB=90°$，$\therefore \angle ADG+\angle ADB=90°$，即 $\angle BDG=90°$，$\therefore BD\perp DG$.

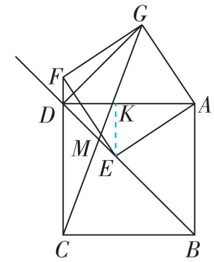
(2) 如图(1)，连接 AC 交 BD 于点 O，则 $\angle COD=90°$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 8，$\therefore AC=BD=\sqrt{2}AB=8\sqrt{2}$，$\therefore OC=OD=4\sqrt{2}$，$\therefore OM=OD-DM=4\sqrt{2}-DM$. $\because \angle COM=\angle GDM=90°$，$\angle CMO=\angle GMD$，$\therefore \triangle CMO\backsim\triangle GMD$，$\therefore \dfrac{DG}{OC}=\dfrac{DM}{OM}$，即 $\dfrac{a}{4\sqrt{2}}=\dfrac{DM}{4\sqrt{2}-DM}$，解得 $DM=\dfrac{4\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}+a}$. $\because \angle BDG=90°$，

$\therefore \tan\angle CMB=\tan\angle DMG=\dfrac{DG}{DM}=a\cdot\dfrac{4\sqrt{2}+a}{4\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}a+8}{8}$，故答案为 $\dfrac{\sqrt{2}a+8}{8}$.



图(1)

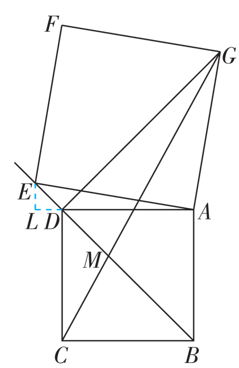


图(2)

(3) 当点 E 在线段 BD 上时，如图(2)，过 E 作 $EK\perp AD$ 于点 K.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle ADE=45°$，$\therefore \triangle DEK$ 为等腰直角三角形，$\therefore DK=EK=DE\cdot\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\therefore AK=AD-DK=8-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 在 Rt$\triangle AKE$ 中，$AE^2=EK^2+AK^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(8-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2=x^2-8\sqrt{2}x+64$，$\therefore S=AE^2=x^2-8\sqrt{2}x+64$.

当点 E 在 BD 延长线上时，如图(3)，过 E 作 $EL\perp AD$ 交 AD 延长线于点 L.



图(3)

同理可得 $EL=DL=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\therefore AL=AD+DL=8+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 在 Rt$\triangle ALE$ 中，$AE^2=EL^2+AL^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(8+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2=x^2+8\sqrt{2}x+64$，$\therefore S=AE^2=x^2+8\sqrt{2}x+64$. 综上，$S$ 与 x 的函数表达式为 $S=x^2-8\sqrt{2}x+64$ 或 $S=x^2+8\sqrt{2}x+64$.

第三部分　中考新趋势

2025 年全国中考数学新考向推荐

刷趋势

1. A 【解析】从正面看题图可得，上面是长方形，下面是梯形，故选 A.

2. A 【解析】依题意有 $\begin{cases}x+y=100,\\ 300x+\dfrac{500}{7}y=10\ 000,\end{cases}$ 故选 A.

3. (1,1)（答案不唯一）【解析】$\because y=-x+2$，